

Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Songül ESİN

Tez Türü ve Tarihi : Yüksek lisans - Haziran 2022

## KISA ÖZET

### DERECELİ HALKALAR

Ecem Aslantaş

Ele alınan tez çalışmasında  $R$  halkası aksi belirtilmediği sürece değişmeli ve birimli kabul edilecektir. Bu tezin amacı değişmeli bir halkanın üzerinde incelenilen homomorfizma, ideal; özel olarak maksimal ve asal idealerin  $\mathbb{Z}$ -dereceli halka üzerindeki karşılıklarının incelenmesidir. Bu incelemeyi yapabilmek için de öncelikle temel halka tanımı ve özellikleri gerekli olduğu yerde detayıyla verilmiştir. Değişmeli bir halkada "payda" tanıtmak için yerelleştirme (lokalizasyon) kullanılır. Payda tanımlama yapılırken değişmeli halka tamlık bölgesi alınır ve kesir cismi oluşturulur. Bu adımlar dereceli halkalarda da yapılabilir. Tezin ikinci bölümünde öncelikle dereceli olmayan halkalarda yerelleştirme ve daha sonra dereceli halkalarda yerelleştirme verilmiştir. Özellikle  $\mathbb{Z}$  tam sayılar halkasında  $\{0\}$  idealinin maksimal ideal olmadığı bilinmektedir.  $K$  bir cisim olmak üzere  $\{0\}$  idealinin  $K[X, X^{-1}]$  dereceli halkasında maksimal homojen bir ideal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca herhangi bir idealin radikali kullanılarak asalmsı ayrışım için birinci teklik teoremine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Noetherian ve Artinian halka kavramları verilmiştir. Noetherian ve Artinian halka kavramları değişmeli veya değişmeli olmayan bir halkanın ideal yapısını basitleştirdiğinden halka teorisinde önemlidir. Artan zincir koşulunu sağlayan halkaya Noetherian halka denir ve karakterizasyonu ise her

ideali sonlu üretilmiş halka olmasıdır. Noetherian ve Artinian halkaların incelemesi lisans düzeyinde tam olarak yapılmadığı düşünülerek tezde bu bilgiler detaylı olarak verilmiştir. Tezin son kısmında ise dereceli Noetherian ve Artinian halkadan bahsedilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** homojen ideal, radikal, yerelleştirme, asalımsı ideal, nil radikal, homojen asalımsı ayrışım, Noetherian halka, Artinian halka.

University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics and Computer Science

Programme : Mathematics and Computer Science

Supervisor : Prof. Dr. Songül ESİN

Degree Awarded and Date : MS - June 2022

## ABSTRACT

### GRADED RINGS

Ecem Aslantaş

In the thesis study,  $R$  ring will be considered commutative and identity unless otherwise stated. The aim of this thesis is to examine the homomorphism, ideal; especially maximal and prime ideals on  $\mathbb{Z}$ -graded ring, which is examined on a commutative ring. In order to be able to carry out this examination, first of all, the basic ring definition and properties are given in detail where necessary. Localization is used to introduce denominator in a commutative ring. While defining the denominator, commutative ring is taken integral domain and fraction field is formed. These steps can also be done in graded rings. In the second chapter of the thesis, firstly localization in non-graded rings and then localization in graded rings are given. It is known that the ideal  $\{0\}$  is not a maximal ideal, especially in the ring  $\mathbb{Z}$  integers. It has been shown that ideal of  $\{0\}$ , where  $K$  is a field, is a maximal homogeneous ideal in the graded ring of  $K[X, X^{-1}]$ . In addition the first uniqueness theorem for primary decomposition is given using radical of any ideal. In the third chapter, Noetherian and Artinian ring notions are given. The Noetherian and Artinian ring notions are important in ring theory as they simplify ideal structure of a commutative or

non-commutative ring. The ring that assure increasing chain condition is called Noetherian ring, its characterization is that every ideal is a finitely produced ring. Considering that examination of Noetherian and Artinian rings is not fully done at the undergraduate level, this information is given in detail in the thesis. In the last part of the thesis, graded Noetherian and Artinian rings are mentioned.

Keywords : homogeneous ideal, radical, localization, nil radical, primary ideal, homogeneous primary decomposition, Noetherian ring, Artinian ring.